# ВАРИАНТ 9

1. [4 балла] Вокруг цветка в одной плоскости с ним по двум окружностям летают шмель и пчела. Скорость пчелы в полтора раза больше скорости шмеля. В указанной плоскости введена прямоугольная система координат, в которой цветок (общий центр окружностей) находится в точке $O(0;0)$. Пчела двигается по часовой стрелке, а шмель – против. В начальный момент времени пчела и шмель находятся в точках $M_0\left(-\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ и $N_0(2;0)$ соответственно. Определите координаты всех положений шмеля, в которых расстояние между ним и пчелой будет кратчайшим.

**Ответ:** $(\sqrt{3};1)$, $(-1;\sqrt{3})$, $(-\sqrt{3};-1)$, $(1;-\sqrt{3})$.

**Решение.** Обозначим точки, в которых находятся пчела и шмель $M\,(\alpha)$ и $N\,(\beta)$ соответственно, где $\alpha$ и $\beta$ – углы, которые образуют радиус-векторы точек $M$ и $N$ с положительным направлением оси абсцисс. Заметим, что угол между $\overrightarrow{AM_0}$ и $\overrightarrow{AN_0}$ равен $\frac{2\pi}{3}$, и при этом $\alpha_0=\frac{2\pi}{3}$, $\beta_0=0$ – углы, соответствующие начальным расположениям насекомых.

Расстояние между шмелём и пчелой будет наименьшим тогда, когда угол между векторами $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{AN}$ равен нулю. Поскольку $|AM_0|=1$ и $|AN_0|=2$ – это радиусы окружностей, и $|AN_0|=2\,|AM_0|$, то угловая скорость пчелы в 3 раза больше угловой скорости шмеля.

Пусть к моменту совпадения направления векторов $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{AN}$ шмель продвинулся на угол $\omega$. Тогда $\alpha_0-3\omega+2\pi k=\beta_0+\omega$, где $k\in\mathbb{Z}$ Следовательно, $\omega=\frac{\alpha_0-\beta_0}{4}+\frac{\pi k}{2}=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{2}$, где $k=0,1,2\ldots$

Различных точек будет четыре (при $k=0,1,2,3$). Для $k=0$ получаем $\beta_1=\beta_0+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}$. Координаты положения шмеля найдём по формулам $x_N=2\cos\beta_1=\sqrt{3}$, $y_N=2\sin\beta_1=1$.

Остальные точки получаются поворотом точки $N_1$ вокруг начала координат на углы $\frac{\pi}{2}$, $\pi$, $\frac{3\pi}{2}$ и имеют, соответственно, координаты $(-1;\sqrt{3})$, $(-\sqrt{3};-1)$, $(1;-\sqrt{3})$.

2. [4 балла] Найдите все тройки целочисленных параметров $a$, $b$ и $c$, при каждой из которых система уравнений

$$\begin{cases} ax+2y+cz=c,\\ 3x+by+4z=4b \end{cases}$$

не имеет решений.

**Ответ:** $(-6;-1;-8)$, $(-3;-2;-4)$, $(3;2;4)$.

**Решение.** Система двух линейных уравнений не имеет решений тогда и только тогда, когда коэффициенты при переменных в уравнениях пропорциональны друг другу, но при этом не пропорциональны свободным членам. Отметим также, что невозможен случай, когда коэффициенты при одной из переменных обращаются в ноль в обоих уравнениях[1]. Получаем

$$\frac{a}{3}=\frac{2}{b}=\frac{c}{4}\neq\frac{c}{4b}. \tag{1}$$

Из первого равенства следует, что $ab=6$, а из второго – что $bc=8$. Так как числа $a$, $b$ и $c$ целые, отсюда следует, что число $b$ является делителем двойки. Таким образом, возможны четыре варианта:

$b=1\Rightarrow a=6,\ c=8;$

$b=-1\Rightarrow a=-6,\ c=-8;$

$b=-2\Rightarrow a=-3,\ c=-4;$

[1] Вообще говоря, это существенное замечание. Например, система уравнений $x+z=-7$ и $3x+3z=-8$ не имеет решений.

$b = 2 \Rightarrow a = 3,\ c = 4.$

Из них подходят все кроме первого – тогда нарушается неравенство в (??). Итак, условию задачи удовлетворяют три тройки целых чисел: $(-6; -1; -8)$, $(-3; -2; -4)$, $(3; 2; 4)$.

3. [4 балла] Решите неравенство $\left(\sqrt{x^3 - 10x + 7} + 1\right) \cdot \left|x^3 - 18x + 28\right| \leqslant 0$.

**Ответ:** $x = -1 + \sqrt{15}$.

**Решение.** Первый множитель в левой части положителен при любых допустимых значениях $x$. Так как второй множитель всегда неотрицателен, неравенство на ОДЗ (т.е. при условии $x^3 - 10x + 7 \geqslant 0$) равносильно уравнению $x^3 - 18x + 28 = 0$. Одним из целых корней уравнения является $x = 2$ (несложно найти подбором среди делителей свободного члена уравнения). Выполнив деление левой части на многочлен $x - 2$, раскладываем её на множители: $(x - 2)\left(x^2 + 2x - 14\right) = 0$. Отсюда $x = 2$ или $x = -1 \pm \sqrt{15}$.

Подставляем полученные значения $x$ в неравенство $x^3 - 10x + 7 \geqslant 0$ для проверки:

$x = 2 \Rightarrow 8 - 20 + 7 \geqslant 0$ – неверно;

$x = -1 + \sqrt{15} \Rightarrow \left(-1 + \sqrt{15}\right)^3 - 10\left(-1 + \sqrt{15}\right) + 7 \geqslant 0 \Leftrightarrow 8\sqrt{15} - 29 \geqslant 0$ – верно;

$x = -1 - \sqrt{15} \Rightarrow \left(-1 - \sqrt{15}\right)^3 - 10\left(-1 - \sqrt{15}\right) + 7 \geqslant 0 \Leftrightarrow -8\sqrt{15} - 29 \geqslant 0$ – неверно.

Следовательно, подходит единственное значение $x = -1 + \sqrt{15}$.

4. [5 баллов] Решите уравнение $2x^4 + x^2 - 6x - 3x^2|x - 3| + 9 = 0$.

**Ответ:** $-\frac{3}{2}$; $1$; $\frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}$.

**Решение.** Уравнение можно переписать в виде $2x^4 + (x - 3)^2 - 3x^2|x - 3| = 0$ или $|x - 3|^2 - 3x^2|x - 3| + 2x^4 = 0$. Чтобы разложить левую часть на множители, отметим, что она представляет собой квадратный трёхчлен относительно $y = |x - 3|$ с дискриминантом, равным $\left(3x^2\right)^2 - 4 \cdot 2x^4 = x^4$. Значит, корни $y_{1,2}$ равны $\frac{3x^2 \pm x^2}{2}$, т.е. $y_1 = 2x^2$ и $y_2 = x^2$, а уравнение принимает вид $\left(|x - 3| - 2x^2\right)\left(|x - 3| - x^2\right) = 0$.

Произведение равно нулю тогда и только тогда, когда один из множителей равен нулю. Отсюда получаем

$$\left[\begin{array}{l} x^2 = x - 3, \\ x^2 = -x + 3, \\ 2x^2 + x - 3 = 0, \\ 2x^2 - x + 3 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 + x - 3 = 0, \\ 2x^2 + x - 3 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}, \\ x = -1.5, \\ x = 1. \end{array}\right.$$

5. [5 баллов] Бросили 70 игральных костей (кубиков с цифрами от 1 до 6 на гранях; вероятность выпадения каждой из граней одна и та же) и посчитали сумму выпавших чисел. Какая из вероятностей больше: того, что сумма больше 350, или того, что сумма не больше 140?

**Ответ:** Больше вероятность того, что сумма не больше 140.

**Решение.** Результат броска кубиков можно описать набором из 70 чисел от 1 до 6. Рассмотрим какой-либо такой набор. Если каждое из чисел набора заменить с $x$ на $7 - x$, получим новый набор, состоящий из чисел от 1 до 6. При этом если сумма чисел в исходном наборе была $S$, то она станет равной $490 - S$. То есть каждому набору с суммой $S$ мы можем поставить в соответствие набор с суммой $490 - S$.

Так как $140 + 350 = 490$, то количество наборов с суммой больше 350 равно количеству наборов с суммой меньше 140. Отметим также, что все наборы равновероятны. Значит, вероятность выбросить больше 350 равна вероятности выбросить меньше 140. Но вероятность выбросить не больше 140 очков выходит больше выше рассмотренных, так как добавляются способы, в которых сумма составляет ровно 140 очков. Поэтому больше вероятность того, что сумма не превосходит 140.

6. [4 балла] Две параллельные прямые $\ell_1$ и $\ell_2$ касаются окружности $\omega_1$ с центром $O_1$ в точках $A$ и $B$ соответственно. Окружность $\omega_2$ с центром $O_2$ касается прямой $\ell_1$ в точке $D$, пересекает прямую $\ell_2$ в точках $B$ и $E$, а также вторично пересекает окружность $\omega_1$ в точке $C$ (при этом точка $O_2$ лежит между прямыми $\ell_1$ и $\ell_2$). Известно, что отношение площади четырёхугольника $BO_1CO_2$ к площади треугольника $O_2BE$ равно $\frac{5}{4}$. Найдите отношение радиусов окружностей $\omega_2$ и $\omega_1$.

**Ответ:** $\frac{R_2}{R_1} = \frac{6}{5}$.

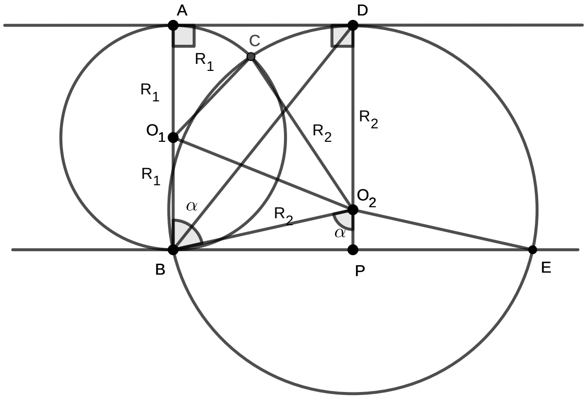


Рис. 1: вариант 9, задача 6

**Решение.** а) Пусть $R_1$, $R_2$ – радиусы окружностей $\omega_1$, $\omega_2$ соответственно, $\angle O_1BO_2 = \alpha$, а прямые $DO_2$ и $\ell_2$ пересекаются в точке $P$. Тогда из условия касания $\angle O_2BE = \frac{\pi}{2} - \alpha$, а $\angle BO_2P = \frac{\pi}{2} - \angle O_2BE = \alpha$. Треугольники $BO_1O_2$ и $CO_1O_2$ равны по трем сторонам, поэтому $S_{BO_1CO_2} = 2S_{O_1BO_2} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot BO_1 \cdot BO_2 \cdot \sin\alpha = R_1R_2\sin\alpha$. Площадь треугольника $BO_2E$ равна $\frac{1}{2}O_2P \cdot BE = \frac{1}{2}R_2\cos\alpha \cdot 2R_2\sin\alpha = R_2^2\sin\alpha\cos\alpha$. Значит, $\frac{5}{4} = \frac{S_{BO_1CO_2}}{S_{BO_2E}} = \frac{R_1}{R_2\cos\alpha}$, то есть $\frac{4}{5}R_1 = R_2\cos\alpha$. Далее, $AB = DP$, откуда $2R_1 = R_2 + R_2\cos\alpha$, следовательно $2R_1 = R_2 + \frac{4}{5}R_1$, и $\frac{R_2}{R_1} = \frac{6}{5}$.

7. [7 баллов] Найдите все значения параметра $a$, при которых система уравнений

$$\begin{cases} a^2 - 2ax - 6y + x^2 + y^2 = 0, \\ (|x| - 4)^2 + (|y| - 3)^2 = 25 \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

**Ответ:** $a \in (-12; -6) \cup \{0\} \cup (6; 12)$.

**Решение.** Рассмотрим второе уравнение системы. При $x \geqslant 0$ и $y \geqslant 0$ оно принимает вид $(x-4)^2 + (y-3)^2 = 25$, и мы получаем окружность радиуса 5 с центром в точке $(4; 3)$ (точнее её часть, лежащую в первой четверти). Поскольку уравнение инвариантно относительно замены $x$ на $(-x)$ и/или $y$ на $(-y)$, множество точек, заданное уравнением системы, симметрично относительно обеих осей координат. Отражая полученную дугу относительно обеих осей координат и точки $(0; 0)$, получаем искомое множество. Обратите внимание, что оно состоит из четырёх дуг окружностей и начала координат.

Первое уравнение может быть записано в виде $(x-a)^2 + (y-3)^2 = 9$. Оно определяет окружность радиуса3 с центром в точке $(a; 3)$. В зависимости от $a$ центр этой окружности перемещается по прямой $y = 3$. Система имеет два решения тогда и только тогда, когда эта окружность имеет ровно две общие точки с множеством, заданным вторым уравнением. Это возможно (см. чертёж) при $a \in (-12; -6) \cup \{0\} \cup (6; 12)$.

 

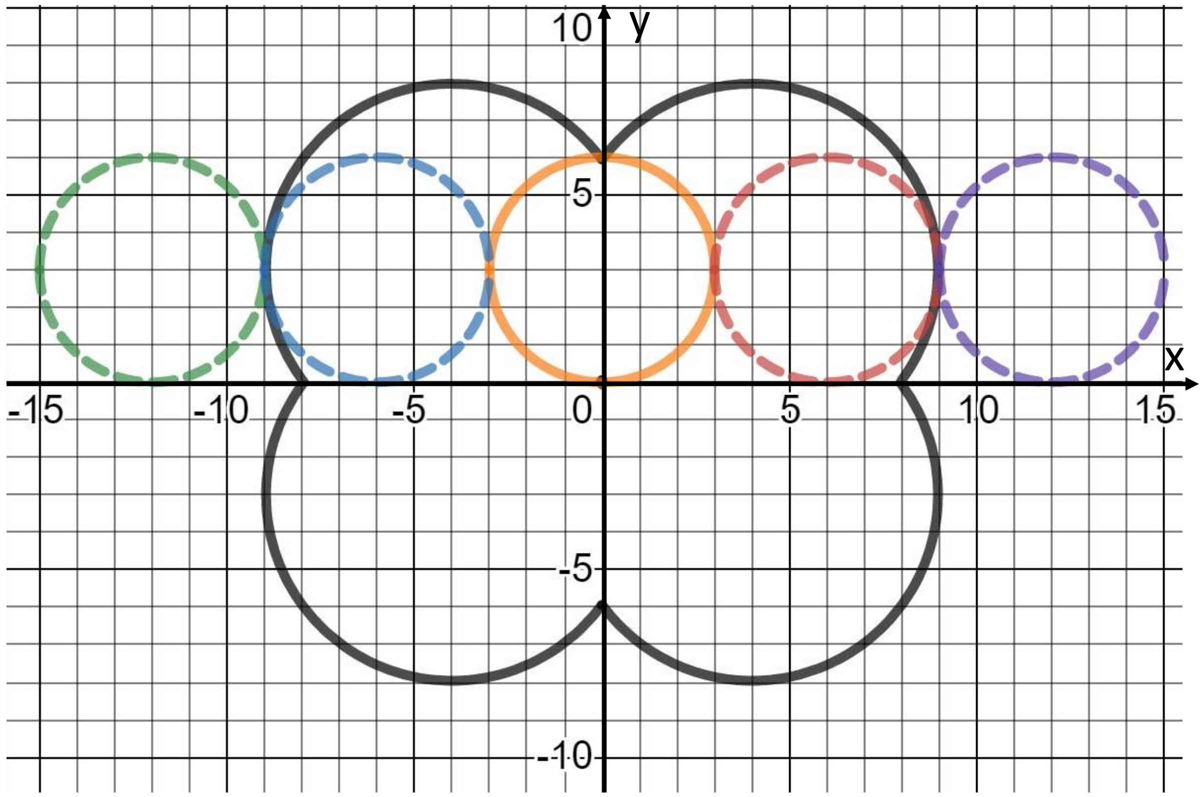


Рис. 2: вариант 9, задача 7

## ВАРИАНТ 10

1. [4 балла] На полу стоит блюдечко с молоком, вокруг которого по двум окружностям ходят котёнок и щенок. Скорость котёнка в два раза меньше скорости щенка. На плоскости пола введена прямоугольная система координат, в которой блюдечко (общий центр окружностей) находится в точке $O(0;0)$. Котёнок двигается по часовой стрелке, а щенок – против. В начальный момент времени котёнок и щенок находятся в точках $M_0(-6;0)$ и $N_0\left(2;2\sqrt{3}\right)$ соответственно. Определите координаты всех положений котёнка, в которых расстояние между животными будет кратчайшим.

   **Ответ:** $\left(-3\sqrt{3};3\right)$, $\left(3;3\sqrt{3}\right)$, $\left(3\sqrt{3};-3\right)$, $\left(-3;-3\sqrt{3}\right)$.

   **Решение.** Обозначим точки, в которых находятся котёнок и щенок $M(\alpha)$ и $N(\beta)$ соответственно, где $\alpha$ и $\beta$ – углы, которые образуют радиус-векторы точек $M$ и $N$ с положительным направлением оси абсцисс. Заметим, что угол между $\overrightarrow{AM_0}$ и $\overrightarrow{AN_0}$ равен $\frac{2\pi}{3}$, и при этом $\alpha_0=\pi$, $\beta_0=\frac{\pi}{3}$ – углы, соответствующие начальным расположениям животных.

   Расстояние между щенком и котёнком будет наименьшим тогда, когда угол между векторами $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{AN}$ равен нулю. Поскольку $|AM_0|=6$ и $|AN_0|=4$ – это радиусы окружностей, и $|AN_0|=\frac{1}{2}|AM_0|$, то угловая скорость щенка в 3 раза больше угловой скорости котёнка.

   Пусть к моменту совпадения направления векторов $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{AN}$ котёнок продвинулся на угол $\omega$. Тогда $\alpha_0-\omega+2\pi k=\beta_0+3\omega$, где $k\in\mathbb{Z}$ Следовательно, $\omega=\frac{\alpha_0-\beta_0}{4}+\frac{\pi k}{2}=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{2}$, где $k=0,1,2\ldots$

   Различных точек будет четыре (при $k=0,1,2,3$). Для $k=0$ получаем $\alpha_1=\alpha_0-\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{6}$. Координаты положения котёнка найдём по формулам $x_N=6\cos\alpha_1=-3\sqrt{3}$, $y_N=6\sin\alpha_1=3$.

Остальные точки получаются поворотом точки $N_1$ вокруг начала координат по часовой стрелке на углы $\frac{\pi}{2}$, $\pi$, $\frac{3\pi}{2}$ и имеют, соответственно, координаты $\left(3; 3\sqrt{3}\right)$, $\left(3\sqrt{3}; -3\right)$, $\left(-3; -3\sqrt{3}\right)$.

2. [4 балла] Найдите все тройки целочисленных параметров $a$, $b$ и $c$, при каждой из которых система уравнений

$$\begin{cases} 2x - by + z = 2b, \\ ax + 5y - cz = a. \end{cases}$$

не имеет решений.

**Ответ:** $(-2; 5; 1)$, $(2; -5; -1)$, $(10; -1; -5)$.

**Решение.** Система двух линейных уравнений не имеет решений тогда и только тогда, когда коэффициенты при переменных в уравнениях пропорциональны друг другу, но при этом не пропорциональны свободным членам. Отметим также, что невозможен случай, когда коэффициенты при одной из переменных обращаются в ноль в обоих уравнениях[2]. Получаем

$$\frac{2}{a} = \frac{-b}{5} = \frac{1}{-c} \neq \frac{2b}{a}. \tag{2}$$

Из первого равенства следует, что $ab = -10$, а из второго – что $bc = 5$. Так как числа $a$, $b$ и $c$ целые, отсюда следует, что число $b$ является делителем пятёрки. Таким образом, возможны четыре варианта:

$b = 1 \Rightarrow a = -10,\ c = 5;$

$b = -1 \Rightarrow a = 10,\ c = -5;$

$b = -5 \Rightarrow a = 2,\ c = -1;$

$b = 5 \Rightarrow a = -2,\ c = 1.$

Из них подходят все кроме первого – тогда нарушается неравенство в (**??**). Итак, условию задачи удовлетворяют три тройки целых чисел: $(-2; 5; 1)$, $(2; -5; -1)$, $(10; -1; -5)$.

3. [4 балла] Решите неравенство $\left(\sqrt{x^3 - 18x - 5} + 2\right) \cdot |x^3 - 4x^2 - 5x + 18| \leqslant 0$.

**Ответ:** $x = 1 - \sqrt{10}$.

**Решение.** Первый множитель в левой части положителен при любых допустимых значениях $x$. Так как второй множитель всегда неотрицателен, неравенство на ОДЗ (т.е. при условии $x^3 - 18x - 5 \geqslant 0$) равносильно уравнению $x^3 - 4x^2 - 5x + 18 = 0$. Одним из целых корней уравнения является $x = 2$ (несложно найти подбором среди делителей свободного члена уравнения). Выполнив деление левой части на многочлен $x - 2$, раскладываем её на множители: $(x-2)\left(x^2 - 2x - 9\right) = 0$. Отсюда $x = 2$ или $x = 1 \pm \sqrt{10}$.

Подставляем полученные значения $x$ в неравенство $x^3 - 18x - 5 \geqslant 0$ для проверки:

$x = 2 \Rightarrow 8 - 36 - 5 \geqslant 0$ – неверно;

$x = 1 + \sqrt{10} \Rightarrow \left(1 + \sqrt{10}\right)^3 - 18\left(1 + \sqrt{10}\right) - 5 \geqslant 0 \Leftrightarrow -5\sqrt{10} + 8 \geqslant 0$ – неверно;

$x = 1 - \sqrt{10} \Rightarrow \left(1 - \sqrt{10}\right)^3 - 18\left(1 - \sqrt{10}\right) - 5 \geqslant 0 \Leftrightarrow 5\sqrt{10} + 8 \geqslant 0$ – верно.

Следовательно, подходит единственное значение $x = 1 - \sqrt{10}$.

4. [5 баллов] Решите уравнение $4x^4 + x^2 + 6x - 5x^2|x + 3| + 9 = 0$.

**Ответ:** $-\frac{3}{4}$; $1$; $\frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$.

[2]Вообще говоря, это существенное замечание. Например, система уравнений $x + z = -7$ и $3x + 3z = -8$ не имеет решений.

 

**Решение.** Уравнение можно переписать в виде $4x^4+(x+3)^2-5x^2|x+3|=0$ или $|x+3|^2-5x^2|x+3|+4x^4=0$. Чтобы разложить левую часть на множители, отметим, что она представляет собой квадратный трёхчлен относительно $y=|x+3|$ с дискриминантом, равным $\left(5x^2\right)^2-4\cdot 4x^4=9x^4$. Значит, корни $y_{1,2}$ равны $\frac{5x^2\pm 3x^2}{2}$, т.е. $y_1=4x^2$ и $y_2=x^2$, а уравнение принимает вид $\left(|x+3|-4x^2\right)\left(|x+3|-x^2\right)=0$.

Произведение равно нулю тогда и только тогда, когда один из множителей равен нулю. Отсюда получаем

$$\left[\begin{array}{l} 4x^2=x+3, \\ 4x^2=-x-3, \\ x^2+x+3=0, \\ x^2-x-3=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x^2-x-3=0, \\ x^2-x-3=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{1\pm\sqrt{13}}{2}, \\ x=-0.75, \\ x=1. \end{array}\right.$$

5. [5 баллов] Бросили 60 игральных костей (кубиков с цифрами от 1 до 6 на гранях; вероятность выпадения каждой из граней одна и та же) и посчитали сумму выпавших цифр. Какая из вероятностей больше: того, что сумма не меньше 300, или того, что сумма меньше 120?

**Ответ:** Больше вероятность того, что сумма не меньше 300.

**Решение.** Результат броска кубиков можно описать набором из 60 чисел от 1 до 6. Рассмотрим какой-либо такой набор. Если каждое из чисел набора заменить с $x$ на $7-x$, получим новый набор, состоящий из чисел от 1 до 6. При этом если сумма чисел в исходном наборе была $S$, то она станет равной $420-S$. То есть каждому набору с суммой $S$ мы можем поставить в соответствие набор с суммой $420-S$.

Так как $120+300=420$, то количество наборов с суммой больше 300 равно количеству наборов с суммой меньше 120. Отметим также, что все наборы равновероятны. Значит, вероятность выбросить больше 300 равна вероятности выбросить меньше 120. Но вероятность выбросить не меньше 300 очков выходит больше выше рассмотренных, так как добавляются способы, в которых сумма составляет ровно 300 очков. Поэтому больше вероятность того, что сумма не меньше 300.

6. [4 балла] Две параллельные прямые $\ell_1$ и $\ell_2$ касаются окружности $\omega_1$ с центром $O_1$ в точках $A$ и $B$ соответственно. Окружность $\omega_2$ с центром $O_2$ касается прямой $\ell_1$ в точке $D$, пересекает прямую $\ell_2$ в точках $B$ и $E$, а также вторично пересекает окружность $\omega_1$ в точке $C$ (при этом точка $O_2$ лежит между прямыми $\ell_1$ и $\ell_2$). Известно, что отношение площади четырёхугольника $BO_1CO_2$ к площади треугольника $O_2BE$ равно $\frac{6}{5}$. Найдите отношение радиусов окружностей $\omega_2$ и $\omega_1$.

**Ответ:** $\frac{R_2}{R_1}=\frac{7}{6}$.

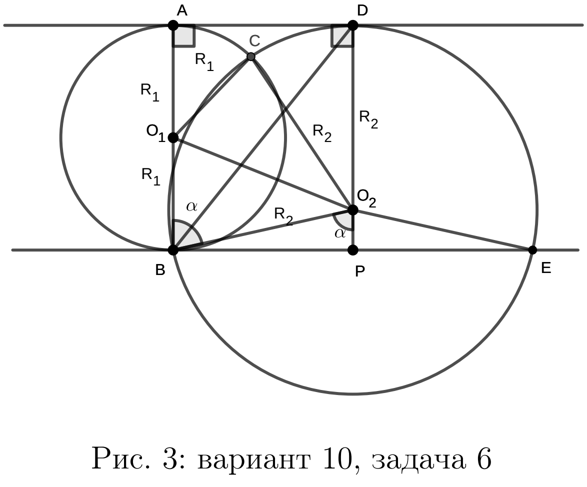


Рис. 3: вариант 10, задача 6

**Решение.** а) Пусть $R_1$, $R_2$ – радиусы окружностей $\omega_1$, $\omega_2$ соответственно, $\angle O_1BO_2 = \alpha$, а прямые $DO_2$ и $\ell_2$ пересекаются в точке $P$. Тогда из условия касания $\angle O_2BE = \frac{\pi}{2} - \alpha$, а $\angle BO_2P = \frac{\pi}{2} - \angle O_2BE = \alpha$. Треугольники $BO_1O_2$ и $CO_1O_2$ равны по трем сторонам, поэтому $S_{BO_1CO_2} = 2S_{O_1BO_2} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot BO_1 \cdot BO_2 \cdot \sin\alpha = R_1R_2 \sin\alpha$. Площадь треугольника $BO_2E$ равна $\frac{1}{2}O_2P \cdot BE = \frac{1}{2}R_2\cos\alpha \cdot 2R_2\sin\alpha = R_2^2 \sin\alpha\cos\alpha$. Значит, $\frac{6}{5} = \frac{S_{BO_1CO_2}}{S_{BO_2E}} = \frac{R_1}{R_2\cos\alpha}$, то есть $\frac{5}{6}R_1 = R_2\cos\alpha$. Далее, $AB = DP$, откуда $2R_1 = R_2 + R_2\cos\alpha$, следовательно $2R_1 = R_2 + \frac{5}{6}R_1$, и $\frac{R_2}{R_1} = \frac{7}{6}$.

7. [7 баллов] Найдите все значения параметра $a$, при которых система уравнений

$$\begin{cases} a^2 - 2ax + 10y + x^2 + y^2 = 0, \\ (|x| - 12)^2 + (|y| - 5)^2 = 169 \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

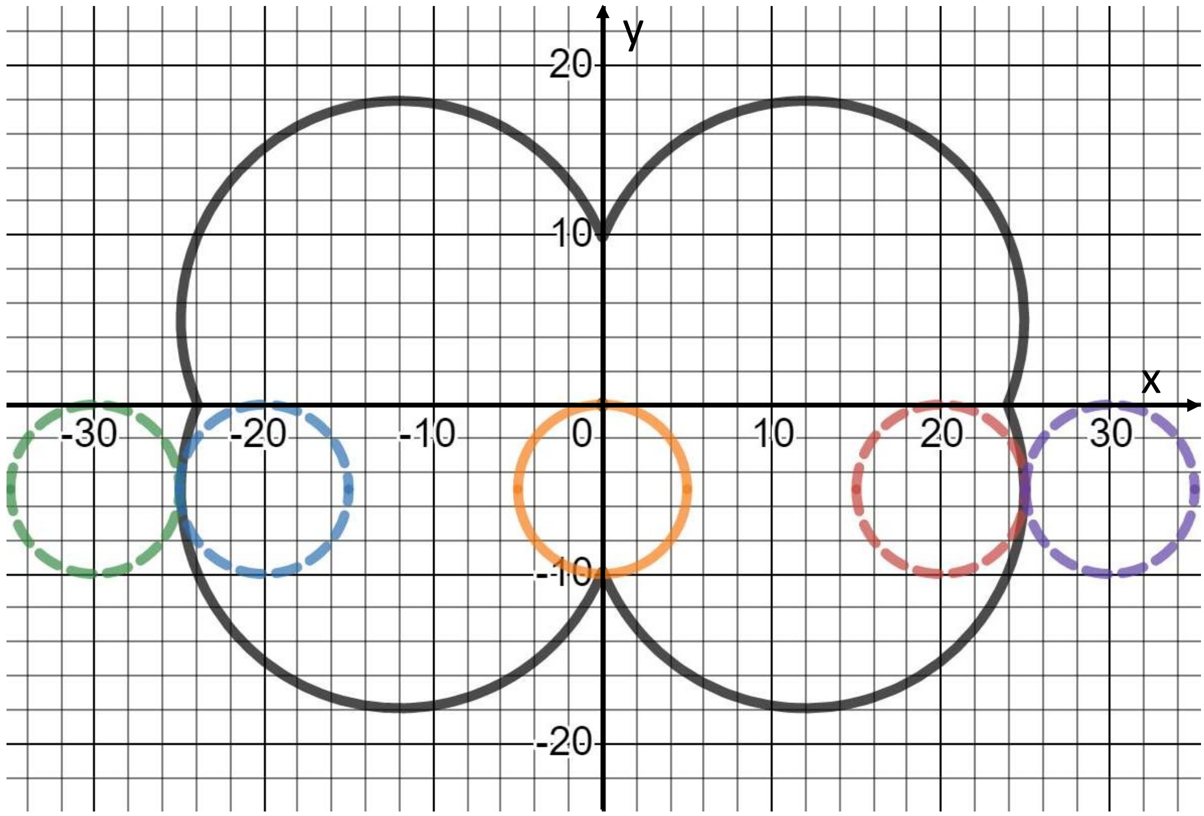


Рис. 4: вариант 10, задача 7

**Ответ:** $a \in (-30; -20) \cup \{0\} \cup (20; 30)$.

**Решение.** Рассмотрим второе уравнение системы. При $x \geqslant 0$ и $y \geqslant 0$ оно принимает вид $(x-12)^2 + (y-5)^2 = 169$, и мы получаем окружность радиуса 13 с центром в точке $(12; 5)$ (точнее её часть, лежащую в первой четверти). Поскольку уравнение инвариантно относительно замены $x$ на $(-x)$ и/или $y$ на $(-y)$, множество точек, заданное уравнением системы, симметрично относительно обеих осей координат. Отражая полученную дугу относительно обеих осей координат и точки $(0; 0)$, получаем искомое множество. Обратите внимание, что оно состоит из четырёх дуг окружностей и начала координат.

Первое уравнение может быть записано в виде $(x-a)^2 + (y+5)^2 = 25$. Оно определяет окружность радиуса 5 с центром в точке $(a; -5)$. В зависимости от $a$ центр этой окружности перемещается по прямой $y = -5$. Система имеет два решения тогда и только тогда, когда эта окружность имеет ровно две общие точки с множеством, заданным вторым уравнением. Это возможно (см. чертёж) при $a \in (-30; -20) \cup \{0\} \cup (20; 30)$.

 

*Задача считается полностью решённой (и за неё начисляется максимальное количество баллов), только если в тексте решения приведены все необходимые преобразования и полностью объяснены все имеющиеся логические шаги; при этом полученные ответы приведены к упрощённому виду.*

*Наличие верного ответа не гарантирует положительного балла за задачу.* Верный ответ без обоснования – баллы не добавляются.

*За верное обоснованное решение за задачу ставится полное количество баллов (указано в скобках после номера задачи). Некоторые частичные продвижения оцениваются согласно инструкции. В остальных случаях оценка ставится по усмотрению проверяющего.*

---

1. **(4 балла)** Найдены радиусы обеих окружностей и соотношение между угловыми скоростями – 2 балла;

   составлено уравнение, из которого могут быть выражены искомые координаты – 1 балл.

---

2. **(4 балла)** Записано условие, при котором система не имеет решений (пропорциональность коэффициентов в левых частях уравнений и отсутствие пропорциональности левой и правой частей) – 2 балла;

   получены лишние решения – не более 2 баллов за задачу.

---

3. **(4 балла)** Получена система из кубического уравнения и кубического неравенства – 1 балл;

   решено кубическое уравнение – 1 балл;

   сделан отбор корней – 2 балла;

   не учтено ОДЗ – не более 1 балла за задачу.

---

4. **(5 баллов)** Левая часть уравнения разложена на множители – 2 балла;

   рассмотрено равенство нулю только одного из двух получившихся множителей – 1 балл.

   *При другом способе решения (раскрытие модуля по определению в исходном уравнении):* рассмотрен только один случай раскрытия модуля – 2 балла.

---

5. **(5 баллов)** Показано, что вероятность выпадения суммы $k$ очков и $490-k$ (или $420-k$) очков одинаковы – 3 балла.

---

6. **(4 балла)** Отношение площадей выражено через отношение радиусов и тригонометрическую функцию – 2 балла.

---

7. **(7 баллов)** Описано множество, задаваемое первым уравнением системы – 1 балл;

   построено множество точек, удовлетворяющих второму уравнению системы – 3 балла

   – если при этом потеряно начало координат, то 2 балла вместо 3;

   найдено значение $a = 0$ – 1 балл;

   найдены два промежутка значений параметра – 2 балла;

   – если при этом получены отрезки вместо интервалов, то 1 балл вместо 2.